Les fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

M5 – Chapitre 2

I. Les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ $\quad (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p)$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \qquad \underline{f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix}}$$

II. Les fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad (f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

1. Ligne de niveau

$$\boxed{\text{Ligne de niveau “}a\text{”} = \mathcal{C}_a = \{M \in \mathbb{R}^n \mid f(M) = a\}}$$

2. Gradient

a. Définition

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}}$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \qquad (h = x - a)$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} \qquad (h = y - b)$$

b. Application à la tangente

Soit T_A tangente (droite, plan, …) à f en $A(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}_A\, f \text{ vecteur normal à } T_A} \qquad \underline{T_A : \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \\ z - \gamma \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_A\, f = 0}$$

III. Les fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $\quad (f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p)$

1. Dérivée directionnelle

a. Définition

$\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, <u>la dérivée de f dans la direction $\vec{v}$ est $df_{M_0}(\vec{v})$</u>

b. Théorème

$$\text{Soit } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^p \\ t & \to & f(M_0 + t\vec{v}) \end{array} \qquad \underline{g'(0) = df_{M_0}(\vec{v})} = \text{dérivée directionnelle}$$

2. Dérivée partielle

a. Définition

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = df_{M_0}(e_i) = \text{dérivée directionnelle selon } e_1}$

b. Conséquence

$$\text{Donc } \boxed{df_{M_0}(\vec{H}) = \vec{H} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{M_0}\, f} = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)$$

3. Différentielle

a. Définition

Si f admet un $DL_1(M_0)$, alors f différentiable en M_0, et on a :

$$\boxed{f\left(M_0+\vec{H}\right)=\underbrace{f(M_0)}_{DL_0}+\underbrace{df_{M_0}\left(\vec{H}\right)}_{\substack{\text{approx.}\\ \text{linéaire}}}+\underbrace{\left\|\vec{H}\right\|\varepsilon\left(\vec{H}\right)}_{\text{erreur}}}$$

- $df_{M_0}\left(\vec{H}\right)=\vec{H}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\mathrm{M_0}}\, f$
- $\varepsilon\left(\vec{H}\right)\underset{0_n}{\to}0_p$
- $\left\|\vec{H}\right\|\varepsilon\left(\vec{H}\right)\ll\vec{H}$

b. Application au calcul du $DL_1(x_0,y_0)$ d'une fonction de $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

C'est $f(x,y)=f\left(M_0+\vec{H}\right)$ avec $\underline{M_0=(x_0,y_0)}$ et $\underline{\vec{H}=\left((x-x_0),(y-y_0)\right)}$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+\|(x-x_0),(y-y_0)\|_2\,\varepsilon(x,y)$$

4. Matrices jacobiennes

a. Définition

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^p \\ & H\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} & \to & \left(f_1(H),\dots,f_p(H)\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \partial x_1 & \dots & \partial x_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \boxed{J_f=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}} & \begin{array}{l} \leftarrow \partial f_1 \\ \vdots \\ \leftarrow \partial f_p \end{array} \end{array}$$

b. Composées d'applications

$$\boxed{(g\circ f)'(x_0)=g'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)}$$

$$d(g\circ f)(x_0)=dg_{f(x_0)}\circ df_{x_0}$$

$$\boxed{J_{g\circ f}=J_{g(f(x))}\cdot J_f}$$